SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

ANALISIS KESALAHAN MAHASISWA PENDIDIKAN MATEMATIKA DALAM MEMAHAMI DAN MENYELESAIKAN SOAL INDUKSI MATEMATIKA PADA MATERI PENGANTAR GRUP BERDASARKAN TEORI KASTOLAN

Debora Sinaga [1], Lisbeth Grace Luciana Silalahi [2], Nasib Maruli Tua Saing [3], Sri Lestari Manurung [4]
Program Studi Pendidikan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Medan[1,2,3,4]
email: deborasinaga08@gmail.com[1], lisbethsilalahi18@gmail.com[2], nasibnasib400@gmail.com[3], sri_lestarimanurung@unimed.ac.id[4]

ABSTRAK
Mahasiswa pendidikan matematika kerap menghadapi kesulitan dalam memahami serta menyelesaikan soal terkait induksi matematika, khususnya pada materi pengantar grup. Penelitian ini bertujuan untuk mengidentifikasi dan menganalisis kesalahan mahasiswa dalam pembuktian induksi berdasarkan Teori Kastolan, yang mengklasifikasikan kesalahan ke dalam tiga kategori: konseptual, prosedural, dan teknis. Dengan menggunakan pendekatan kualitatif melalui metode studi kasus, penelitian ini melibatkan 20 mahasiswa pendidikan matematika semester IV. Data dikumpulkan melalui tes diagnostik serta analisis dokumen hasil pekerjaan mahasiswa. Hasil penelitian mengungkap bahwa mahasiswa sering melakukan kesalahan konseptual dalam memilih rumus yang sesuai serta memahami tahapan pembuktian. Kesalahan prosedural muncul akibat ketidakteraturan dalam menyusun langkah-langkah pembuktian dan kesulitan dalam menyederhanakan soal hingga bentuk akhir. Selain itu, kesalahan teknis banyak ditemukan dalam bentuk ketidaktelitian perhitungan aljabar dan manipulasi simbol. Temuan ini menegaskan perlunya strategi pembelajaran yang lebih efektif, seperti scaffolding dan diskusi kelompok, guna meningkatkan pemahaman mahasiswa terhadap konsep induksi matematika.
Kata Kunci: *Analisis Kesalahan, Induksi Matematika, Teori Kastolan, Pembuktian Matematika, Pendidikan Matematika.*

ABSTRACT
Mathematics education students often face difficulties in understanding and solving problems related to mathematical induction, particularly in introductory group theory. This study aims to identify and analyze students' errors in induction proof based on Kastolan's Theory, which classifies errors into three categories: conceptual, procedural, and technical. Using a qualitative approach with a case study method, this research involved 20 fourth-semester mathematics education students. Data were collected through diagnostic tests and document analysis of students' work. The findings reveal that students frequently make conceptual errors in selecting the appropriate formula and understanding the steps of proof. Procedural errors arise due to inconsistencies in structuring proof steps and difficulties in simplifying problems to their final form. Additionally, technical errors are commonly found in the form of inaccuracies in algebraic calculations and symbol manipulation. These findings emphasize the need for more effective learning strategies, such as scaffolding and group discussions, to enhance students' understanding of mathematical induction concepts.
Keywords: *Error Analysis, Mathematical Induction, Kastolan's Theory, Mathematical Proof, Mathematics Education.*

PENDAHULUAN

Induksi Matematika merupakan suatu metode pembuktian yang digunakan untuk memverifikasi kebenaran pernyataan matematika yang berkaitan dengan bilangan asli (Astawa, 2020). Proses pembuktiannya mencakup dua tahap utama, yaitu tahap dasar (basic step) dan tahap induksi (induction step) (Hine, 2017). Langkah-langkah dalam pembuktian menggunakan Induksi Matematika dapat membantu mahasiswa dalam mengembangkan kemampuan analisis. Pada awalnya, prinsip induksi matematika hanya diterapkan pada proposisi-proposisi yang berhubungan langsung dengan bilangan bulat, seperti penjumlahan suatu deret dengan n suku (Hidayah et al, 2022). Seiring perkembangan metode ini, induksi matematika menjadi alat yang efektif untuk menyelesaikan berbagai permasalahan yang tidak terbatas pada bilangan bulat. Misalnya, metode ini dapat digunakan dalam pembuktian identitas-identitas dalam teori peluang (kombinatorial), teori graf, hingga geometri.

Meskipun materi Induksi Matematika telah diajarkan sejak tingkat SMA, banyak mahasiswa yang tetap merasa kesulitan dalam memahaminya. Sejumlah studi menunjukkan bahwa mahasiswa kerap melakukan kesalahan saat menyelesaikan soal-soal induksi matematika (Ardiawan, 2015; Atiqoh & Hafiz, 2021; Fajri et al., 2019; Walida & Hasana, 2020). Kesulitan yang berkelanjutan ini dapat menghambat kemampuan mahasiswa dalam membuktikan pernyataan matematika menggunakan induksi. Oleh karena itu, analisis terhadap kesalahan-kesalahan yang umum dilakukan mahasiswa diperlukan sebagai dasar untuk mengembangkan pendekatan pembelajaran yang lebih efektif, sehingga pemahaman mahasiswa terhadap konsep induksi matematika dapat ditingkatkan (Miksalmina, 2012).

Kesalahan yang dilakukan mahasiswa saat mengerjakan soal dapat menjadi indikator tingkat penguasaan dan pemahaman mereka terhadap materi. Dengan demikian, munculnya kesalahan dalam proses pembelajaran tidak hanya menandakan adanya kesulitan, tetapi juga dapat menjadi kesempatan berharga untuk memperdalam pemahaman. Pandangan ini selaras dengan pendapat Mardiyah (2020), yang menyatakan bahwa informasi mengenai kesalahan dalam menyelesaikan soal matematika dapat digunakan untuk meningkatkan kualitas proses pembelajaran, yang pada akhirnya berkontribusi terhadap peningkatan prestasi belajar matematika siswa.

Penelitian sebelumnya telah banyak membahas kesulitan mahasiswa dalam memahami dan menyelesaikan soal Induksi Matematika. Ardiawan (2015) dalam studinya di IKIP PGRI Pontianak menemukan bahwa mahasiswa kerap mengalami kendala dalam memahami konsep dan prosedur induksi matematika. Kesalahan yang sering terjadi mencakup penggunaan aturan induksi yang tidak tepat, kesalahan dalam substitusi nilai, serta kekeliruan dalam operasi aljabar. Selain itu, penelitian lain juga menunjukkan bahwa pemahaman konsep dasar induksi yang masih lemah berdampak pada kemampuan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal terkait. Sebagai contoh, penelitian Hakim et al (2021) yang menganalisis kesalahan siswa SMP berdasarkan tahapan Kastolan mengungkap bahwa kesalahan konseptual dan prosedural merupakan jenis kesalahan yang paling dominan.

Berdasarkan data Programme for International Student Assessment (PISA) 2022, skor literasi matematika siswa Indonesia mengalami penurunan sebesar 13 poin dibandingkan dengan PISA 2018, dengan rata-rata skor 366, yang masih berada di bawah rata-rata skor OECD sebesar 472. Namun, peringkat Indonesia justru mengalami kenaikan lima posisi dibandingkan dengan PISA 2018, yang mencerminkan ketangguhan sistem pendidikan Indonesia dalam menghadapi dampak pandemi terhadap hasil belajar. Penurunan skor literasi matematika ini mengindikasikan bahwa kemampuan siswa Indonesia dalam memahami dan menerapkan konsep matematika masih perlu ditingkatkan. Salah satu topik yang sering menjadi tantangan adalah Induksi Matematika, yang membutuhkan keterampilan dalam penalaran dan pembuktian. Penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa kerap melakukan kesalahan konseptual, prosedural, dan teknik dalam menyelesaikan soal Induksi Matematika.

Mahasiswa masih mengalami berbagai kendala dalam memahami dan menyelesaikan soal induksi matematika pada materi pengantar grup. Induksi matematika merupakan metode pembuktian yang mendasar dalam matematika, khususnya dalam membuktikan teorema terkait himpunan bilangan bulat dan struktur aljabar seperti grup. Namun, penelitian menunjukkan bahwa mahasiswa sering mengalami kesulitan dalam menyelesaikan soal pembuktian yang menuntut pemahaman konseptual yang mendalam, bukan sekadar mengikuti prosedur secara mekanis. Kesulitan tersebut dapat dikategorikan ke dalam kesalahan konseptual, prosedural, dan teknik sesuai dengan Teori Kastolan (Afdila et al, 2018; Afma et al, 2023; Noviani, 2019). Selain itu, rendahnya pemahaman mahasiswa juga dipengaruhi oleh kurangnya latihan yang berorientasi pada pemahaman mendalam. Mahasiswa jarang diberikan soal yang mendorong mereka untuk memahami konsep, merancang strategi penyelesaian, serta mengevaluasi langkah-langkah pembuktian yang telah dilakukan. Akibatnya, mereka tidak terbiasa menghadapi soal pembuktian yang kompleks dan cenderung hanya mengandalkan prosedur tanpa memahami logika yang mendasarinya (Ayuningsih, R., et al. (2020)..

Penelitian ini bertujuan untuk mengisi kesenjangan yang ada dengan menganalisis secara kualitatif kesalahan mahasiswa pendidikan matematika dalam memahami dan menyelesaikan soal induksi matematika pada materi pengantar grup, berdasarkan klasifikasi kesalahan menurut Teori Kastolan. Menggunakan pendekatan deskriptif kualitatif, penelitian ini berfokus pada identifikasi berbagai jenis kesalahan dalam pembuktian induksi matematika, meliputi kesalahan konseptual, prosedural, dan teknikal sesuai dengan klasifikasi dalam Teori Kastolan. Penelitian ini berupaya menjawab pertanyaan utama: "Apa saja jenis kesalahan yang dilakukan oleh mahasiswa pendidikan matematika dalam menyelesaikan soal induksi matematika pada materi pengantar grup, dan bagaimana kesalahan tersebut dapat dianalisis berdasarkan Teori Kastolan?" Selain mengidentifikasi kesalahan, penelitian ini juga mengeksplorasi faktor-faktor yang menyebabkan mahasiswa melakukan kesalahan, terutama dalam tahapan pembuktian induksi yang sistematis.

Penelitian ini memiliki signifikansi yang besar karena dapat memberikan wawasan mendalam mengenai kesalahan yang dilakukan mahasiswa dalam memahami dan menyelesaikan soal induksi matematika, sekaligus berkontribusi dalam pengembangan teori pembelajaran matematika yang lebih kontekstual dan sesuai dengan kebutuhan mahasiswa, khususnya melalui penerapan Teori Kastolan dalam analisis kesalahan. Dari segi praktis, hasil penelitian ini diharapkan dapat membantu dosen dalam merancang strategi pembelajaran yang lebih efektif dan sesuai dengan kebutuhan mahasiswa, terutama dalam meningkatkan pemahaman mereka terhadap tahapan pembuktian induksi matematika. Selain itu, dari perspektif kebijakan pendidikan, temuan penelitian ini berpotensi memberikan kontribusi dalam perancangan kurikulum pendidikan matematika di perguruan tinggi, dengan menekankan pentingnya pemahaman konseptual serta penguasaan keterampilan berpikir logis dalam pembuktian matematika. Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya memberikan kontribusi teoritis dalam memahami pola kesalahan mahasiswa, tetapi juga memiliki implikasi praktis yang dapat meningkatkan kualitas pembelajaran matematika, terutama dalam materi pengantar grup di tingkat pendidikan tinggi.

METODE PENELITIAN

Penelitian ini menggunakan pendekatan kualitatif dengan metode studi kasus untuk memperoleh pemahaman yang mendalam mengenai kesalahan mahasiswa dalam memahami dan menyelesaikan soal induksi matematika pada materi pengantar grup berdasarkan Teori Kastolan. Metode studi kasus dipilih agar dapat mengeksplorasi secara detail berbagai jenis kesalahan yang terjadi dalam konteks perkuliahan matematika di tingkat perguruan tinggi. Partisipan penelitian adalah 20 mahasiswa pendidikan matematika semester VI yang sedang menempuh mata kuliah Struktur Aljabar di Universitas Negeri Medan.

SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

Instrumen utama dalam penelitian ini adalah tes diagnostik dan analisis dokumen. Tes diagnostik berisi tiga soal induksi matematika yang dirancang untuk mengidentifikasi jenis kesalahan yang dilakukan mahasiswa. Selain itu, dokumentasi dalam bentuk hasil pekerjaan mahasiswa dianalisis untuk mengidentifikasi pola kesalahan yang konsisten. Pengumpulan data dilakukan dalam dua tahap, yaitu pemberian tes diagnostik dan analisis dokumen. Tes diagnostik diberikan untuk mengidentifikasi berbagai aspek induksi matematika dalam materi pengantar grup. Hasil pekerjaan mahasiswa dikaji lebih lanjut untuk menemukan pola kesalahan yang berulang. Analisis data dilakukan menggunakan pendekatan analisis kesalahan berdasarkan Teori Kastolan. Tahapan analisis meliputi identifikasi kesalahan berdasarkan jenisnya, seperti kesalahan konsep, prosedural, dan teknik. Selanjutnya, kesalahan dideskripsikan dan dianalisis untuk menemukan penyebab utama. Eksplanasi kesalahan dilakukan untuk memahami faktor yang menyebabkan mahasiswa melakukan kesalahan, baik dari aspek pemahaman konsep maupun strategi penyelesaian soal. Adapun soal yang digunakan adalah:

1. Buktikan bahwa $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^3 = (\sum_{k=1}^{n}(2k-1))^2, \forall\, n \in N$
2. Buktikan bahwa $n^3 - 5n + 7\ habis\ dibagi\ 4,\ \forall\, n \in N$
3. Buktikan bahwa $n^3 \equiv n\ (mod\ 8)\ \forall\, n \in N$

Dalam penelitian ini, indikator jenis kesalahan berdasarkan tahapan Kastolan diklasifikasikan ke dalam tiga kategori utama. Kesalahan konseptual terjadi ketika mahasiswa tidak memahami atau tidak memilih konsep yang tepat sesuai dengan permasalahan yang diberikan, atau ketika mereka telah memilih konsep yang benar tetapi gagal mengaplikasikannya secara efektif. Kesalahan prosedural muncul ketika mahasiswa tidak mengikuti langkah-langkah penyelesaian secara sistematis atau menggunakan prosedur yang tidak sesuai dalam menjawab soal. Sementara itu, kesalahan teknik mencakup kesalahan dalam perhitungan, penyelesaian persamaan, serta kecerobohan dalam pengerjaan soal. Dalam penelitian ini, data dianalisis dengan mengklasifikasikan kesalahan mahasiswa berdasarkan kategori yang telah ditetapkan dalam Teori Kastolan.

Tabel 1. Indikator Jenis Kesalahan Menurut Teori Kastolan

No.	Jenis Kesalahan Berdasarkan Teori Kastolan	Indikator Jenis Kesalahan Menurut Teori Kastolan
1.	Kesalahan Konseptual	a. Siswa mengalami hambatan dalam memilih rumus matematika yang sesuai untuk menyelesaikan soal secara tepat. b. Siswa dapat memilih rumus yang tepat, tetapi mengalami kesulitan dalam menerapkannya dengan benar.
2.	Kesalahan Prosedural	a. Siswa kesulitan menyusun langkah-langkah penyelesaian sesuai dengan ketentuan dalam soal. b. Siswa mengalami kesulitan menyelesaikan soal hingga mencapai bentuk yang paling sederhana.
3.	Kesalahan Teknik	a. Siswa melakukan kesalahan dalam menjalankan operasi perhitungan. b. Siswa melakukan kesalahan dalam memindahkan angka atau operasi hitung dari satu langkah ke langkah selanjutnya.

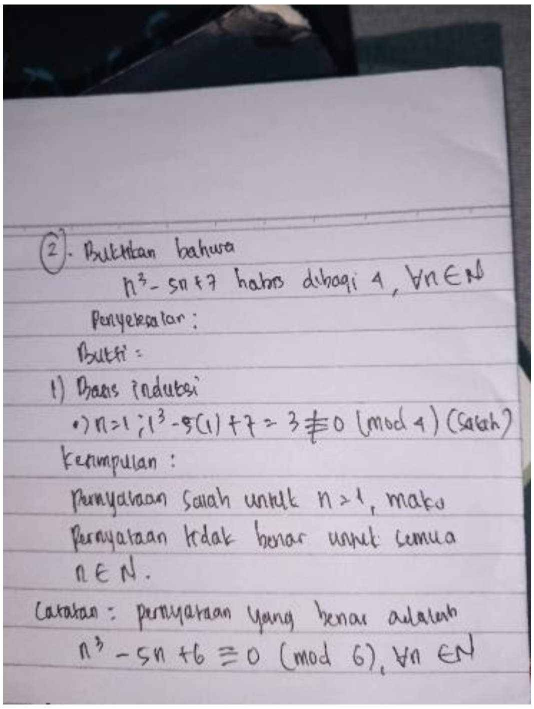
SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

HASIL DAN PEMBAHASAN

Hasil

1. **Kesalahan Konsep**

a. **Kesalahan dalam memilih rumus matematika yang sesuai untuk menyelesaikan soal secara tepat**



Gambar 1. Hasil Tes Indikator a

Kesalahan konseptual yang terjadi pada gambar 1 menunjukkan bahwa subjek mengalami kesulitan dalam memilih pernyataan atau rumus matematika yang benar sebelum melakukan pembuktian dengan metode induksi. Dalam soal tersebut, subjek diminta membuktikan bahwa ekspresi $n^3 - 5n + 7$ selalu habis dibagi 4 untuk semua bilangan alami nnn. Namun, ketika dilakukan pengecekan awal pada basis induksi dengan $n = 1$, hasil perhitungan menunjukkan bahwa $1^3 - 5(1) + 7 = 3$, yang dalam modulo 4 menghasilkan $3 \not\equiv 0\ (mod\ 4)$. Hal ini menunjukkan bahwa pernyataan yang akan dibuktikan tidak benar sejak awal, sehingga pembuktian dengan induksi tidak dapat dilakukan. Seharusnya, sebelum melakukan pembuktian induksi, subjek perlu melakukan verifikasi terhadap pernyataan tersebut untuk beberapa nilai awal guna memastikan bahwa klaim yang akan diuji memang valid.

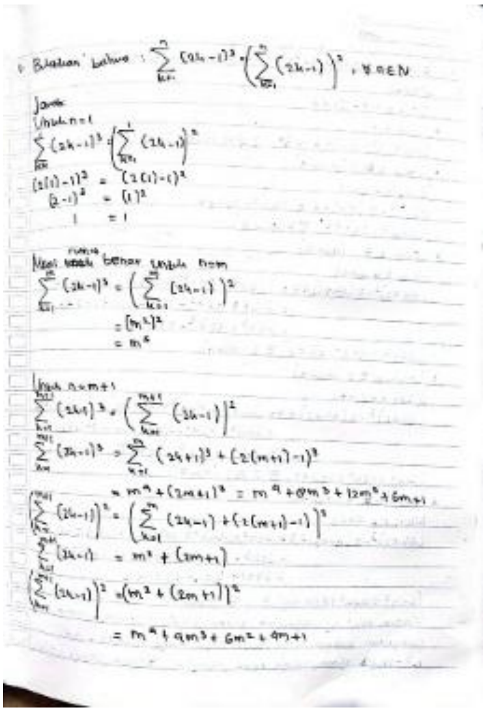
Kesalahan ini termasuk dalam kategori (a), siswa mengalami hambatan dalam memilih rumus matematika yang sesuai untuk menyelesaikan soal secara tepat karena subjek langsung mencoba melakukan pembuktian tanpa terlebih dahulu memastikan kebenaran pernyataan yang akan diuji. Dalam pembuktian induksi, langkah pertama yang harus dilakukan adalah memeriksa apakah pernyataan benar untuk nilai awal tertentu, biasanya $n = 1$, sebelum melanjutkan ke langkah induksi. Jika pada langkah ini ditemukan bahwa pernyataan tidak benar, maka pembuktian dengan induksi tidak dapat diterapkan. Dalam kasus ini, subjek telah mengikuti prosedur induksi dengan benar, tetapi karena pernyataan awal yang diuji salah, maka pembuktian tidak bisa dilanjutkan.

Selain itu, kesalahan ini juga menunjukkan bahwa subjek kurang memahami bagaimana memilih model matematika yang tepat untuk diuji dengan metode induksi. Pada bagian akhir

SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

jawaban, subjek menyadari bahwa pernyataan yang benar seharusnya adalah $n^3 - 5n + 6 \equiv 0 \ (mod \ 6)$, yang berbeda dari klaim awal dalam soal. Hal ini menunjukkan bahwa terdapat ketidaksesuaian antara rumus yang digunakan dengan sifat bilangan yang ingin dibuktikan. Kesalahan semacam ini bisa dihindari jika subjek lebih teliti dalam menganalisis soal sebelum langsung menerapkan metode pembuktian. Oleh karena itu, sebelum memulai pembuktian induksi, subjek perlu memahami struktur pernyataan yang akan diuji, memastikan bahwa klaim tersebut benar untuk beberapa nilai awal, dan menyesuaikan model matematika yang digunakan agar sesuai dengan konsep yang ingin dibuktikan. Dengan demikian, subjek dapat menghindari kesalahan dalam memilih rumus atau model yang akan diuji dalam pembuktian matematika.

b. Kesalahan memilih rumus yang tepat, tetapi mengalami kesulitan dalam menerapkannya dengan benar



Gambar 2. Hasil Tes Indikator b

Kesalahan dalam penyelesaian soal yang ada pada gambar 2 tergolong sebagai kesalahan konseptual jenis (b), yaitu siswa dapat memilih rumus yang tepat, tetapi mengalami kesulitan dalam menerapkannya dengan benar. Dalam jawaban yang diberikan, subjek menggunakan metode induksi matematika, yang secara konsep sudah benar untuk membuktikan rumus jumlah kubik bilangan ganjil pertama. Subjek telah menyusun langkah-langkah pembuktian dengan tepat, dimulai dari basis induksi dengan $n = 1$, hipotesis induksi dengan asumsi bahwa rumus berlaku untuk $n = m$, hingga ke langkah induksi untuk $n = m + 1$. Namun, kesalahan terjadi pada tahap penerapan induksi, khususnya dalam manipulasi ekspresi aljabar. Ketika menambahkan suku ke $(m + 1)$, subjek menuliskan bentuk kubik dari $(2m + 1)^3$ tetapi melakukan ekspansi yang tidak sesuai dengan rumus binomial. Kesalahan ini menyebabkan hasil akhir tidak cocok dengan bentuk yang seharusnya terbukti.

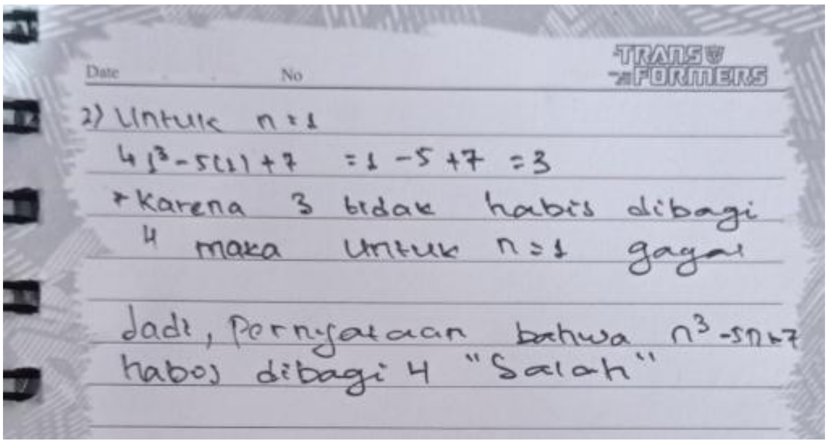
Selain itu, kesalahan lain muncul dalam proses penjumlahan dan pengkuadratan jumlah bilangan ganjil pertama. Subjek telah menggunakan sifat jumlah bilangan ganjil, yaitu $\sum_{k=1}^{m}(2k - 1) = m^2$, namun saat menambahkan suku $(2m + 1)$ ke dalam jumlah tersebut dan mengkuadratkannya, terjadi kesalahan dalam ekspansi kuadrat yang mengakibatkan ketidaksesuaian dengan bentuk kubik yang dikembangkan sebelumnya. Akibatnya, kedua sisi persamaan yang ingin dibuktikan tidak sama, sehingga langkah induksi tidak valid. Kesalahan

SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

ini menunjukkan bahwa subjek memahami konsep induksi matematika secara umum dan mampu memilih metode pembuktian yang benar, tetapi mengalami kesulitan dalam menerapkan perhitungan aljabar secara tepat, terutama dalam ekspansi binomial dan manipulasi bentuk kuadrat. Oleh karena itu, kesalahan dalam penyelesaian ini dikategorikan sebagai kesalahan konseptual jenis (b), di mana subjek mampu memilih metode yang sesuai tetapi mengalami kesalahan dalam penerapannya.

2. **Kesalahan Prosedural**

a. **Kesalahan menyusun langkah-langkah penyelesaian sesuai dengan ketentuan dalam soal**



Gambar 3. Hasil Tes Indikator a

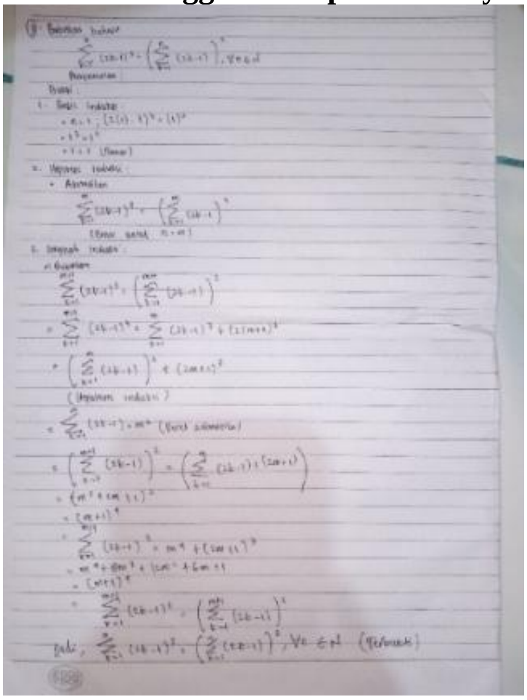
Pada gambar 3, subjek diminta untuk membuktikan bahwa ekspresi $n^3 - 5n + 7$ habis dibagi 4 untuk semua $n \in N$. Dalam penyelesaiannya, subjek memulai dengan langkah pertama, yaitu basis induksi, dengan mensubstitusi $n = 1$ ke dalam ekspresi $13 - 5(1) + 7 = 1 - 5 + 7 = 3$. Kemudian, subjek memeriksa hasilnya dalam modulo 4 dan mendapatkan $3 \not\equiv 0\ (mod\ 4)$. Karena hasilnya tidak memenuhi syarat habis dibagi 4, subjek langsung menyimpulkan bahwa pernyataan tersebut salah untuk semua $n \in N$. Kesalahan ini muncul karena subjek tidak melanjutkan pembuktian dengan mencoba nilai nnn lainnya atau mengevaluasi apakah ada pola tertentu yang berlaku untuk nilai n yang lebih besar. Selain itu, subjek tidak melanjutkan ke hipotesis induksi, yang seharusnya menyatakan bahwa jika suatu nilai $n = k$ memenuhi sifat tersebut, maka harus dibuktikan bahwa $n = k + 1$ juga memenuhi sifat yang sama.

Seharusnya, jika basis induksi gagal (dalam hal ini tidak memenuhi modulo 4), langkah yang tepat bukan langsung menyimpulkan bahwa pernyataan salah untuk semua n. Subjek perlu mempertimbangkan kemungkinan kesalahan dalam pernyataan yang diberikan atau perluasan analisis lebih lanjut. Faktanya, di bagian bawah jawaban, terdapat catatan bahwa pernyataan yang benar adalah $n^3 - 5n + 6 \equiv 0\ (mod\ 6), \forall n \in N$. Hal ini menunjukkan bahwa ada kesalahan dalam pernyataan awal soal, tetapi subjek tidak melakukan revisi atau mencoba mengevaluasi ulang dengan langkah yang lebih sistematis.

Kesalahan ini masuk ke dalam kesalahan prosedural kategori (a), yaitu siswa kesulitan menyusun langkah-langkah penyelesaian sesuai dengan ketentuan dalam soal. Dalam metode induksi, ada tiga langkah utama: basis induksi, hipotesis induksi, dan langkah induksi. Subjek hanya melakukan langkah pertama tetapi tidak melanjutkan ke langkah kedua dan ketiga. Dengan hanya memeriksa $n = 1$, subjek tidak bisa memastikan kebenaran atau kesalahan pernyataan untuk semua n, karena metode induksi memerlukan generalisasi dari suatu nilai $n = k$ ke $n = k + 1$. Oleh karena itu, kesalahan yang dilakukan menunjukkan bahwa subjek belum memahami pentingnya kelengkapan prosedur dalam pembuktian induksi matematika.

SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

b. Kesalahan menyelesaikan soal hingga mencapai bentuk yang paling sederhana



Gambar 4. Hasil Tes Indikator b

Kesalahan pada gambar 4 terjadi dalam tahap langkah induksi, terutama dalam menyederhanakan bentuk akhir dari ekspresi yang diperoleh. Subjek telah melakukan langkah awal dengan benar, yaitu membuktikan basis induksi untuk $n = 1$ dan menyusun hipotesis induksi dengan asumsi bahwa pernyataan berlaku untuk $n = m$. Namun, dalam langkah untuk membuktikan bahwa pernyataan juga berlaku untuk $n = m + 1$, terdapat kesalahan prosedural dalam menyusun dan menyederhanakan ekspresi hasil penjumlahan bilangan ganjil yang dipangkatkan tiga.

Ketidaktepatan utama terjadi saat subjek mencoba menunjukkan bahwa jumlah kubik dari bilangan ganjil pertama hingga $(m + 1)$ masih mengikuti pola yang sama dengan hipotesis induksi. Dalam hal ini, subjek menambahkan $(2m + 1)^3$ ke jumlah yang sudah diasumsikan benar, tetapi tidak menyelesaikan bentuk aljabar secara eksplisit. Ekspresi yang diperoleh, yaitu $(m^2 + 2m + 1)^2$, memang merupakan bentuk umum dari jumlah kuadrat bilangan ganjil, tetapi subjek tidak menunjukkan bagaimana bentuk ini muncul dari ekspansi kubik yang benar.

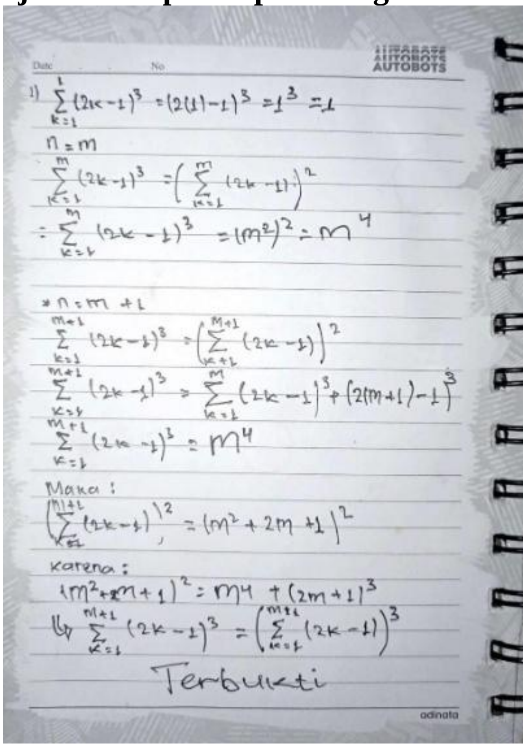
Selain itu, subjek tidak menuliskan secara eksplisit bagaimana hubungan antara jumlah kubik bilangan ganjil pertama hingga m dengan suku tambahan $(2m + 1)^3$ menghasilkan bentuk yang sesuai dengan pola induksi. Hal ini menyebabkan kurangnya kejelasan dalam transisi dari hipotesis induksi ke langkah induksi, yang merupakan bagian krusial dalam pembuktian dengan metode induksi matematika. Jika diperiksa lebih lanjut, subjek seharusnya melakukan ekspansi secara lebih rinci terhadap suku tambahan dan menunjukkan bahwa hasil akhirnya benar-benar sesuai dengan bentuk yang diharapkan.

Kesalahan ini masuk dalam kategori kesalahan prosedural jenis (b) karena siswa tidak menyederhanakan bentuk akhir secara optimal dan tidak menunjukkan secara eksplisit bagaimana bentuk kuadrat dari jumlah bilangan ganjil pertama hingga $(m + 1)$ terbentuk dari jumlah kubik yang diperoleh. Untuk memperbaikinya, subjek harus lebih teliti dalam mengembangkan ekspresi aljabar, menyusun kembali langkah-langkah pembuktian secara lebih sistematis, serta memastikan bahwa hasil akhirnya sesuai dengan bentuk yang diharapkan dalam hipotesis induksi.

3. Kesalahan Teknik

SCIENCE : Jurnal Inovasi Pendidikan Matematika dan IPA
Vol. 5 No. 1 Februari 2025
E-ISSN : 2797-1031
P-ISSN : 2797-0744
Online Journal System : https://jurnalp4i.com/index.php/science

a. Kesalahan dalam menjalankan operasi perhitungan

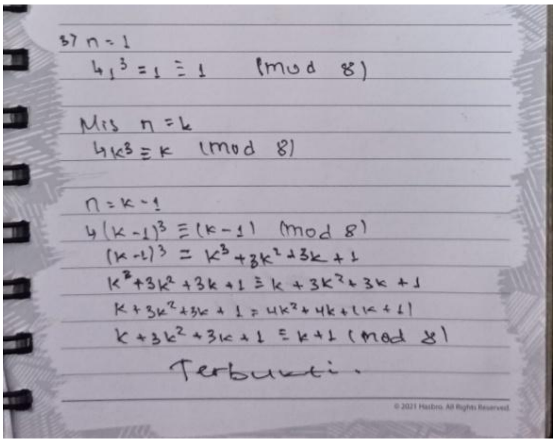


Gambar 5. Hasil Tes Indikator a

Berdasarkan analisis terhadap solusi yang diberikan, pada gambar 5 terdapat potensi kesalahan dalam operasi perhitungan, terutama pada tahap manipulasi aljabar dan penggunaan sifat induksi matematika. Salah satu kemungkinan kesalahan terletak pada ekspresi perpangkatan dan penjumlahan, di mana dalam proses penyesuaian bentuk induksi, hasil perhitungan dapat menjadi tidak sesuai jika tidak dilakukan secara teliti.

Misalnya, pada tahap ketika ekspresi $(m^2 + 2m + 1)^2$ dikembangkan, jika terjadi kesalahan dalam melakukan perkalian atau penjumlahan, maka hasil akhirnya akan melenceng dari bentuk yang seharusnya. Selain itu, dalam penerapan konsep jumlah deret bilangan ganjil, ketidaktepatan dalam menyusun ekspresi sigma atau salah dalam mengembangkan bentuk umumnya dapat berpengaruh terhadap kebenaran pembuktian. Menurut Kastolan (2010), kesalahan dalam operasi hitung sering kali disebabkan oleh ketidaktelitian dalam mengoperasikan bilangan atau kesalahan dalam penggunaan sifat-sifat aljabar yang relevan.

b. Kesalahan dalam memindahkan angka atau operasi hitung dari satu langkah ke langkah selanjutnya



Gambar 6. Hasil Tes Indikator b

Berdasarkan analisis terhadap perhitungan yang terdapat pada gambar 6 tersebut, terdapat kesalahan dalam pemindahan angka dan operasi hitung dari satu langkah ke langkah selanjutnya. Kesalahan utama tampak pada bagian manipulasi ekspresi $(k-1)^3$. Secara aljabar, ekspansi dari $(k-1)^3$ menggunakan rumus binomial adalah $(k-1)^3 = k^3 - 3k^2 + 3k - 1$. Namun, dalam pembahasan tampaknya terdapat ketidakkonsistenan saat menyusun ulang ekspresi ini dalam modulo 8. Pada langkah yang menyatakan $(k-1)^3 \equiv (k-1) \pmod 8$ seharusnya dilakukan substitusi yang benar terhadap ekspansi $(k-1)^3$ lalu mengalikan dengan 4. Jika tidak dilakukan dengan cermat akan terjadi kesalahan dalam perhitungan. Kesalahan seperti ini sering muncul dalam manipulasi ekspresi modulus, terutama ketika melibatkan perkalian dan distribusi operasi terhadap modulus. Menurut Polya (1957) dalam *How to Solve It*, salah satu sumber utama kesalahan dalam matematika adalah kurang teliti dalam langkah-langkah perhitungan, terutama dalam pemindahan angka dan transformasi ekspresi.

Pembahasan

Hasil penelitian ini secara komprehensif mengungkap bahwa mahasiswa masih menghadapi tantangan signifikan dalam menyelesaikan soal-soal induksi matematika, terutama dalam konteks materi pengantar grup. Temuan ini menggarisbawahi adanya kesenjangan antara pemahaman teoretis dan kemampuan aplikasi mahasiswa dalam ranah pembuktian matematika. Identifikasi tiga kategori utama kesalahan, yaitu konseptual, prosedural, dan teknikal, memberikan gambaran yang lebih rinci mengenai sumber kesulitan yang dialami mahasiswa. Kesalahan-kesalahan ini tidak hanya menghambat keberhasilan dalam menyelesaikan soal, tetapi juga mengindikasikan adanya kelemahan fundamental dalam pemahaman konsep-konsep kunci. Temuan serupa juga dilaporkan oleh Afifah & Noto (2019) yang menemukan bahwa mahasiswa seringkali kesulitan menghubungkan konsep-konsep matematika yang telah dipelajari sebelumnya dengan materi induksi matematika.

Kesalahan konseptual, yang mencerminkan ketidakmampuan mahasiswa dalam memilih dan menerapkan konsep yang relevan, menyoroti pentingnya penguatan pemahaman dasar sebelum melangkah ke tahap pembuktian. Hal ini menunjukkan bahwa mahasiswa mungkin belum sepenuhnya menguasai prinsip-prinsip dasar induksi matematika, seperti basis induksi dan langkah induktif. Tanpa pemahaman yang kokoh tentang landasan konseptual ini, upaya untuk membangun argumen pembuktian yang valid akan menjadi sulit. Penelitian yang dilakukan oleh Nurhayati et al. (2023) juga menyoroti bahwa kurangnya pemahaman konsep dasar menjadi penyebab utama kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal-soal pembuktian.

Kesalahan prosedural, yang termanifestasi dalam ketidakmampuan mengikuti langkah-langkah pembuktian secara sistematis, menunjukkan perlunya penekanan pada aspek algoritmik dari induksi matematika. Mahasiswa perlu dilatih untuk secara disiplin mengikuti urutan langkah yang benar, mulai dari verifikasi kasus dasar hingga pembuktian langkah induktif. Ketidakmampuan menyederhanakan hasil ke bentuk yang paling sederhana mengindikasikan kurangnya pemahaman tentang bagaimana langkah-langkah tersebut saling terkait dan berkontribusi pada pembentukan argumen yang utuh. Studi kasus oleh Rachmawati (2017) menemukan bahwa mahasiswa seringkali melewatkan langkah-langkah penting dalam pembuktian atau tidak mampu mengaitkan langkah-langkah tersebut secara logis.

Kesalahan teknikal, yang mencakup kesalahan perhitungan aljabar, manipulasi simbol, dan ketidaktelitian dalam operasi hitung, menyoroti pentingnya keterampilan dasar matematika sebagai fondasi untuk keberhasilan dalam pembuktian induksi. Meskipun terkesan sederhana, kesalahan-kesalahan teknis ini dapat menggagalkan seluruh proses pembuktian. Hal ini menegaskan bahwa penguasaan materi prasyarat dan ketelitian dalam perhitungan matematis adalah aspek krusial yang tidak boleh diabaikan. Hal ini sejalan dengan temuan dari Anggraeni & Wardani (2023) yang mengidentifikasi kesalahan teknis sebagai salah satu jenis kesalahan yang paling sering dilakukan mahasiswa dalam menyelesaikan soal matematika tingkat lanjut.

Implikasi dari temuan ini adalah perlunya perbaikan dalam strategi pembelajaran induksi matematika. Pendekatan yang lebih efektif harus mencakup pemberian latihan soal yang bertahap, mulai dari yang sederhana hingga yang kompleks, untuk membangun pemahaman yang kokoh. Diskusi kelompok dapat difasilitasi untuk memungkinkan mahasiswa saling berbagi pemahaman dan strategi penyelesaian masalah. Pendekatan berbasis masalah, di mana mahasiswa dihadapkan pada soal-soal kontekstual yang menantang, dapat memotivasi mereka untuk lebih aktif dalam belajar. Selain itu, pemanfaatan teknologi interaktif, seperti perangkat lunak visualisasi atau simulasi, dapat membantu mahasiswa memvisualisasikan konsep-konsep abstrak dan memperkuat pemahaman mereka. Dengan kombinasi strategi-strategi ini, diharapkan kesalahan mahasiswa dalam induksi matematika dapat diminimalkan, dan kemampuan pembuktian matematika mereka dapat ditingkatkan secara signifikan. Penerapan *scaffolding* dalam pembelajaran, seperti yang disarankan oleh Priyanto & Suhendri (2023), dapat membantu menjembatani kesenjangan pemahaman mahasiswa dan memberikan dukungan yang terstruktur dalam proses belajar induksi matematika.

KESIMPULAN

Hasil penelitian ini mengindikasikan bahwa mahasiswa masih mengalami berbagai jenis kesalahan dalam menyelesaikan soal induksi matematika, khususnya pada materi pengantar grup. Kesalahan yang teridentifikasi dikategorikan ke dalam tiga jenis utama, yaitu kesalahan konseptual, prosedural, dan teknik. Kesalahan konseptual terjadi ketika mahasiswa tidak dapat memilih atau menerapkan konsep yang sesuai dalam pembuktian induksi. Kesalahan prosedural muncul akibat ketidaktepatan dalam mengikuti tahapan pembuktian secara sistematis, seperti tidak menyederhanakan hasil hingga bentuk yang paling sederhana. Sementara itu, kesalahan teknikal berkaitan dengan ketidakakuratan dalam perhitungan aljabar, manipulasi simbol, serta ketidaktelitian dalam operasi hitung. Temuan ini menegaskan perlunya strategi pembelajaran yang lebih efektif untuk meminimalisasi kesalahan dalam memahami dan menerapkan konsep induksi matematika.

Kesulitan ini menunjukkan bahwa mahasiswa masih memerlukan pemahaman yang lebih mendalam tentang metode induksi matematika. Oleh karena itu, diperlukan strategi pembelajaran yang lebih efektif, seperti pemberian latihan bertahap, diskusi kelompok, dan pendekatan berbasis masalah. Dosen juga dapat memanfaatkan teknologi interaktif untuk membantu mahasiswa memahami konsep secara lebih jelas. Dengan cara ini, diharapkan mahasiswa dapat meningkatkan kemampuan mereka dalam pembuktian matematika dan mengurangi kesalahan dalam menyelesaikan soal induksi

DAFTAR PUSTAKA

Afdila, N. F., et al. (2018). Analisis Kesalahan Siswa Dalam Menyelesaikan Masalah Kontekstual Materi Bangun Ruang Sisi Datar Berdasarkan Tahapan Kastolan. *Jurnal LEMMA*, *5*(1), 65–72. https://doi.org/10.22202/jl.2018.v5i1.3383

Afifah, A. L. N., & Noto, M. S. (2019). Analisis kesulitan mahasiswa dalam materi pembuktian pada mata kuliah bilangan bulat. *Jurnal THEOREMS (The Original Research of Mathematics)*, *3*(2), 187–194.

Afma, Y. S., et al. (2023). Analisis kesalahan berdasarkan tahapan Kastolan dalam menyelesaikan soal pemecahan masalah matematika siswa kelas VIII SMPN 3 VII

Koto Sungai [1] Sarik. *Jurnal Pembelajaran dan Matematika Sigma (JPMS)*, *9*(2), 209–220. https://doi.org/10.36987/jpms.v9i2.4785

Anggraeni, R. P., & Wardani, K. W. (2023). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal matematika materi barisan dan deret berdasarkan Teori Newman. *Journal on Education*, *6*(1), 9133–9143.

Ardiawan, Y. (2015). Analisis Kesalahan Mahasiswa dalam Menyelesaikan Soal Induksi Matematika di IKIP PGRI Pontianak. *Jurnal Pendidikan Informatika dan Sains*, *4*(1), 147-163.

Astawa, I. M. W. (2020). Penerapan Model Pembelajaran Problem Based Intruction dengan Media Power Point Guna Meningkatkan Prestasi Belajar IPA. *Journal of Education Action Research*, *4*(4), 459-466.

Atiqoh, K. S. N., & Hafiz, M. (2021). Miskonsepsi Mahasiswa pada Induksi Matematika Menggunakan Certainty of response Index (CRI). *Jurnal Padegogik*, *4*(2), 43-51.

Ayuningsih, R., et al. (2020). Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Program Linear Berdasarkan Teori Kesalahan Kastolan. *Imajiner: Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika*, *2*(6), 510–518. https://doi.org/10.26877/imajiner.v2i6.6790

Fajri, N., et al. (2019). Analisis Kesalahan Konsep Mahasiswa pada Pokok Bahasan Induksi Matematika di STKIP Bina Bangsa Gesempena Banda Aceh. *Jurnal Numeracy*, *6*(2), 164-171.

Hakim, I. Q., et al. (2021). Analisis Kesalahan Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal Pemahaman Konsep Berdasarkan Tahapan Kastolan. *Jurnal Pendidikan Matematika Raflesia*, *6*(1), 70-87.

Hidayah, S., et al. (2022). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika. *Jurnal Review Pendidikan dan Pengajaran*, *5*(1), 37–41. http://journal.universitaspahlawan.ac.id/index.php/jrpp

Hine, G. (2017). Proof by Mathematical Induction: Professional Practice for Secondary Teachers. *Proceedings of the 26th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers*, 117-124.

Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi Republik Indonesia. (2023, 12 Desember). *Peringkat Indonesia pada PISA 2022 naik 56 posisi dibanding 2018*. Kementerian Pendidikan, Kebudayaan, Riset, dan Teknologi. https://www.kemdikbud.go.id/main/blog/2023/12/peringkat-indonesia-pada-pisa-2022-naik-56-posisi-dibanding-2018

Mardiyah, A. (2024). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan soal induksi matematika. *Lemma: Letters of Mathematics Education*, *10*(2), 134-148.

Miksalmina. (2012). Penerapan Induksi Matematika Dalam Pembuktian Matematika. *Dosen STKIP Bina Bansa Getsempena Banda Aceh*, *3*(2), 69-75.

Noviani, J. (2019). Analisis Kesalahan Mahasiswa Menurut Tahapan Kastolan dan Pemecahan Masalah Matematika Finansial Model Polya. *Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika Al Qalasadi*, *3*(1), 2739. https://doi.org/10.32505/qalasadi.v3i1.891

Nurhayati, N., et al. (2023). Analysis of students' mathematical proving ability. *AIP Conference Proceedings*, *2819*(1), 110005. https://doi.org/10.1063/5.0171078

Polya, G. (1957). *How to solve it: A new aspect of mathematical method* (2nd ed.). Princeton University Press.

Priyanto, E., & Suhendri, H. (2023). Scaffolding dalam pembelajaran matematika. *Teorema: Teori dan Riset Matematika*, *8*(1), 221. https://doi.org/10.25157/teorema.v8i1.9402

Rachmawati, I. (2017). Studi kasus kesalahan mahasiswa dalam pembuktian menggunakan induksi matematika. *Jurnal Penelitian dan Pembelajaran Matematika*, *10*(2).

Sari, D. K. (2023). Analisis kesalahan mahasiswa dalam menyelesaikan permasalahan Aljabar Boolean berdasarkan Teori Kastolan. *EULER: Jurnal Ilmiah Matematika, Sains dan Teknologi*, *11*(2), 237-247.

Walida, S. E., & Hasana, S. N. (2020). The Identification of Students' Misconceptions in Mathematical Induction. *Journal of Education and Learning Mathematics Research (JELMaR)*, *1*(2), 50-57.